Beweise im Geometrie-unterricht

Nancy Jens
Daniel Metzsch

Freie Universität Berlin

Didaktik des Stochastik-, Geometrie-, Algebra- und Arithmetikunterrichts, SS 2006, Dr. Martina Lenze

Vorformen des mathematischen Beweises

- Ausweitung des Inhalts
- Einbeziehung verschiedener Repräsentationsformen
- Reduktion der fachlichen Strenge
- Teilaktivitäten schaffen
- Reduktion des Umfangs

Ausweitung des Inhalts

„Die statistische Auffassung von *beweisen können* […] ist aufzugeben zugunsten einer umfassenderen und dynamischeren Sicht zur Sicherung und Widerlegung von Behauptungen …“

H. Schupp

Ausweitung des Inhalts

- Es geht also mehr darum, eine Form des rationalen Begründens zu lernen.
- Es gibt keinen Mathematikunterricht, der hierzu nicht beitragen kann.
- H. Winter: „Dialogfähigkeit, Dialog-willigkeit, Argumentationsfähigkeit, Fähigkeit, vernünftig zu reden“
- **demonstratives** Schließen vs. **plausibles** Schließen

Ausweitung des Inhalts

„Wir sichern die Gültigkeit unseres mathematischen Wissens durch *demonstratives* Schließen, aber wir stützen unsere Vermutungen durch *plausibles* Schließen. Ein mathematischer Beweis besteht aus *demonstrativem* Schließen, aber der Induktionsbeweis des Physikers, der Indizienbeweis des Juristen, der dokumentatorische Beweis des Historikers gehören zum *plausiblen* Schließen.“

G. Polya, 1962

Repräsentationsformen

- verschiedene Medien nötig
- im Dialog überwiegt aber die Sprache

→verschiedene Niveaus von Begründungen

→Bsp. Winkelsumme nach *Winter, 1972*

→Bsp. Kongruenzen nach *Holland, 1973*

- eine Trennung von ikonischer und symbolischer Ebene wird erschwert

Winkelsumme, *Winter*

Mögliche Begründungen für den Innenwinkelsummensatz an Dreiecken:

1. Ausmessen
2. Papierdreieck so falten, dass sich die drei Winkelfelder zu 180° ergänzen
3. Wechselwinkelpaare an Parallelen
4. Winkeltreue der Punktspiegelung

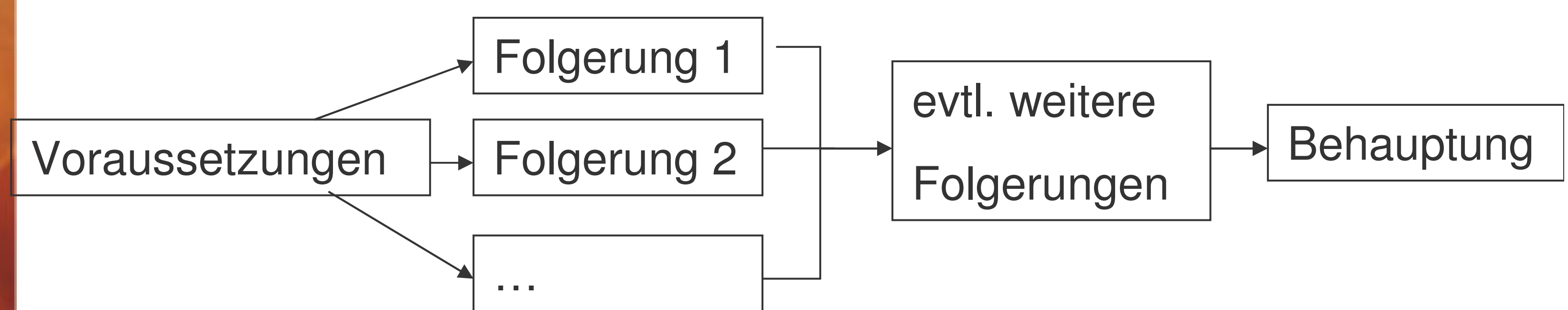
Niveau steigt

Kongruenzen, *Holland*

1. ausschneiden, aufeinanderlegen
2. durch Abbildungen kongruente Figuren erzeugen
3. durch Abbildungen Kongruenzen begründen
4. Begriff der Kongruenzabbildung def.
5. Eigenschaften?
6. Äquivalenzrelation?
7. Konstruktion durchführen, beschreiben
8. die vier Kongruenzsätze für Dreiecke
9. mit Hilfe der Kongruenzsätze einfache Beweis führen

Repräsentationsformen

- Beweisschritte durch *bildhafte Symbole* darstellen:
  - Graphische Schemata (Beweisbäume)
  - Lösungsstammbäume
  - Kennzeichnung von Problemen



Reduktion der fachlichen Strenge

- Grad der Strenge herabsetzen durch:
  - verwenden von Umgangssprache
  - kein axiomatisches Vorgehen
  - Allaussagen auf Spezialfälle übertragen
  - teilweise unbekannte bzw. unbewiesene Voraussetzungen benutzen

Teilaktivitäten

- aus der Einführung bekannte Taxonomie der Lernziele nach *Bloom*
  - Wissen (Mindestniveau)
  - Verstehen
  - Anwenden
  - Analysieren
  - Synthetisieren
  - Bewerten

Teilaktivitäten

- Meine Schüler/innen haben den Beweis verstanden, wenn sie
  - eine Beweisidee wiedergeben können,
  - den Beweisablauf in einem Flussdiagramm skizzieren können,
  - einen zum dargebotenen ähnlichen Beweis selber führen können,
  - die Voraussetzungen nennen können,
  - Begründen können, warum die Beweis-idee nicht notwendigerweise auf ähnliche Sätze übertragbar ist,

Teilaktivitäten

– einen Beweis auf formale und inhaltliche Richtigkeit prüfen können,

– die Beweismethode erkennen (direkt, indirekt, induktiv),

– Lücken in einem Beweis schließen können.

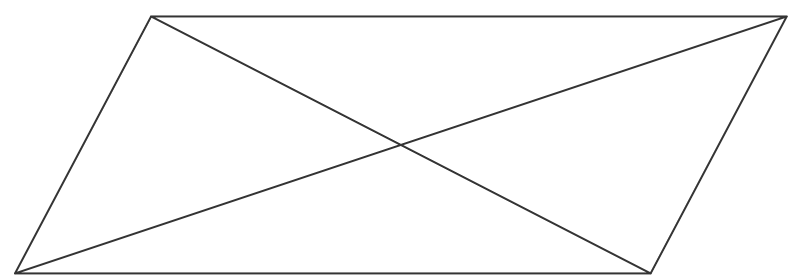
nach Walter, 1975

Reduktion des Umfangs

- in der Geometrie ist der Kontext zum Begründen sehr umfangreich
- „Mammutcharakter“ des Axiomensystems
- zu lange Beweiswege bis zu einiger - maßen interessanten Aussagen
- man unterscheidet das bzw. die
  - **Lokale Ordnen** *(Freudenthal)*
  - **Themenkreismethode** *(Wittenberg)*

Lokales Ordnen

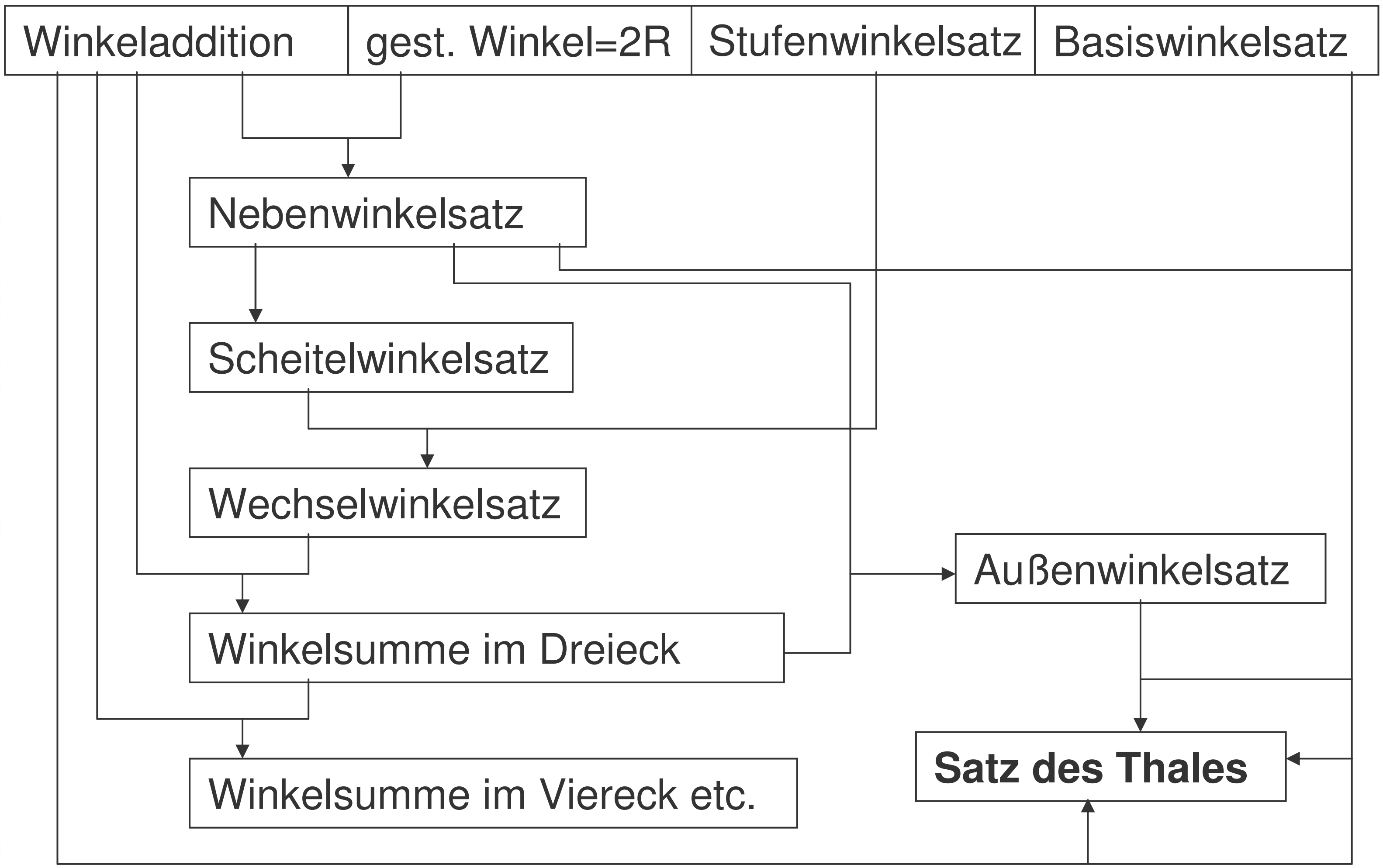
- Alternative zur vollständigen Axiomatisierung
- das Ordnen erfolgt im Zusammen-hang mit der Begriffsbildung
- Welche Eigenschaften könnt ihr am folgenden Parallelogramm entdecken?



Lokales Ordnen

- man beschränkt sich also auf einen inhaltlichen Teilbereich
- „Naive Axiomatik“ nach *Griesel*
- zum Beweis von Sätzen werden andere Sätze benutzt
- deduktives Vorgehen nach *Walsch*
  - Beispiel: Winkelsätze (1975)

Winkelsätze
nach *Griesel*, 1963



Lokales Ordnen

- diese Tätigkeit der lokalen Axiomatisierung teilt das bestehende Satzsystem in zwei disjunkte Mengen ein:
  - Klasse der Basissätze
  - Klasse der Folgesätze
- Basissätze möglichst unabhängig
- weiteres Beispiel:
  - Winkel in Dreiecken nach *Walsch*, 1975
    - Gleiche Umfangswinkel → Satz des Thales

Themenkreismethode

- Übergang zum Lokalen Ordnen ist fließend (weniger logisch-deduktiv)
- schon im früheren Alter möglich durch folg.
- 4 Kriterien:
  - Auswahl eines zentralen Themas
  - durchgehende Motivation
  - Gewinnung abgeschlossener Resultate
  - Zulässigkeit intuitiver Begründungen

Themenkreismethode

- Beispiele
  - Symmetrie
  - Ähnlichkeit, Strahlensätze
  - Flächeninhalt
  - pythagoreische Satzgruppe
  - …

ENDE

„Es bildet ein Talent sich in der Stille…“

aus *Tasso,*

J.W. Goethe

Literatur

- Gerhard Becker (1980):
  Geometrieunterricht
  Didaktische Grundrisse
  Bad Heilbrunn, Klinkhardt Verlag