Inhaltsverzeichnis

1 Einführung ins Thema

1.1 Prolog

Wenn man über Euklids ELEMENTE(griechisch stoicheia) spricht und schreibt, muss man sich der Bedeutung dieses Meisterwerks im Klaren sein. Die Beschäftigung mit diesem Meisterwerk mündet zwangsläufig in Ehrfurcht. Diese Arbeit soll keineswegs eine langweilige Nacherzählung des Inhalts sein. Der Inhalt ist die Grundlage zur mathematischen Betrachtung. Natürlich werden hiermit keine neuen Erkenntnisse über Euklid ermittelt, aber herauskommen soll, dass die ELEMENTE ein Meisterwerk sind, dass jedoch auch Schwächen aufweist. Das Kuriose ist ja, dass auf Grund nur eines Axioms das „Haus" und damit ein Teil der ELEMENTE in sich zusammenfällt. Gezeigt werden sollen also im Wesentlichen die euklidische Geometrie und der Übergang zu einer anderen Geometrie und die Gründe dafür natürlich. Interessant ist auch Euklids Standpunkt zu Platon (427 v. Chr. – 348 v. Chr.) und dessen Raumvorstellung, die Euklid übernahm. Auch das soll Teil dieser Arbeit sein. Es soll also mehr als nur die bloße Widergabe des Inhaltes sein, die sich hier im Wesentlichen auf die Geometrie beschränken wird. Zur besseren Verständlichkeit werden in Kapitel 6.3 Originalformulierungen in den heutigen Sprachgebrauch übersetzt. Man erkennt sie an der geschweiften Umklammerung {…} im Verlauf des Textes.

Lange Rede kurzer Sinn – Viel Spaß beim Lesen!

1.2 Ein zweites „Buch der Bücher"

Ist es das meistgelesene Buch nach der Bibel? War es mehr als 2000 Jahre das Mathematikbuch überhaupt? Eines ist sicher, Euklid legte mit diesem Buch den Grundstein der Mathematik seiner Zeit. In seinem, aus 13 Büchern aufgebautem, Werk fasste Euklid die gesamte, bis dorthin bekannte, Mathematik zusammen und systematisierte sie. Von Geometrie bis Zahlentheorie schrieb er auf, was derzeit bekannt war. Vermutlich stand er Platons Philosophie sehr nahe. Aus diesem Grund legte er keinen Wert auf die praktische Anwendung mathematischer Kenntnisse und verzichtete deshalb auf ihr Erscheinen in den ELEMENTEN. Euklids Texte zeigen eine strenge Struktur. Sie setzen sich aus Definitionen, Sätzen und Beweisen zusammen. Lediglich im Buch I der ELEMENTE wählt er die Bausteine Definition, Postulat und Axiom. Über das Axiomensystem wird im Folgenden noch zu reden sein. Man kann die gesamte nachfolgende Arbeit der Mathematiker auf ein Axiom zurückführen, durch das eine neue Geometrie, auch hyperbolische Geometrie genannt, entstand. Dieses Axiom sollte grundlegend die gesamte Geometrie verändern. Aufgrund der Arbeit von J. L. Heiberg, T. L. Heath, P. Tannery und anderen Mathematikhistorikern, ist es uns heute möglich, die ELEMENTE in gedruckter Form zu kaufen und zu lesen. Das uns heute vorliegende Werk ist dem griechischen Original weitgehend treu geblieben. Einer der wichtigsten Übersetzer war Adelhard von Bath, der die ELEMENTE im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzte und damit für die Welt der Wissenschaft und Gelehrten lesbar machte. Die ELEMENTE waren jedoch nicht, wie der Titel vermuten lässt, für Anfänger bestimmt, sondern für Leser auf fortgeschrittenem Niveau, da die Komplexität der Sätze und Problemstellungen teilweise sehr ausgeprägt ist. Den Wunsch des Königs Ptolemäus nach einem leichteren Weg zur Mathematik als dem durch die ELEMENTE lehnte Euklid mit dem Ausspruch ab: „ES GIBT KEINEN KÖNIGSWEG ZUR MATHEMATIK.“([Q8], S.760). Zu den allgemein bekannten XIII Büchern sind im Laufe der Zeit noch zwei weitere hinzugekommen. Zum einen Buch XIV von Hypsikles, der im 2. Jh. v. u. Z. lebte und außerdem Buch XV, dass wahrscheinlich von Damaskios stammt, der im 5. Jh. v. u. Z. lebte. Wie man hier sehen kann, bediente sich Euklid der Mathematik aus verschiedensten Zeiten. Man wird im Folgenden sehen, wie die ELEMENTE und Euklid die Mathematik beeinflussten.

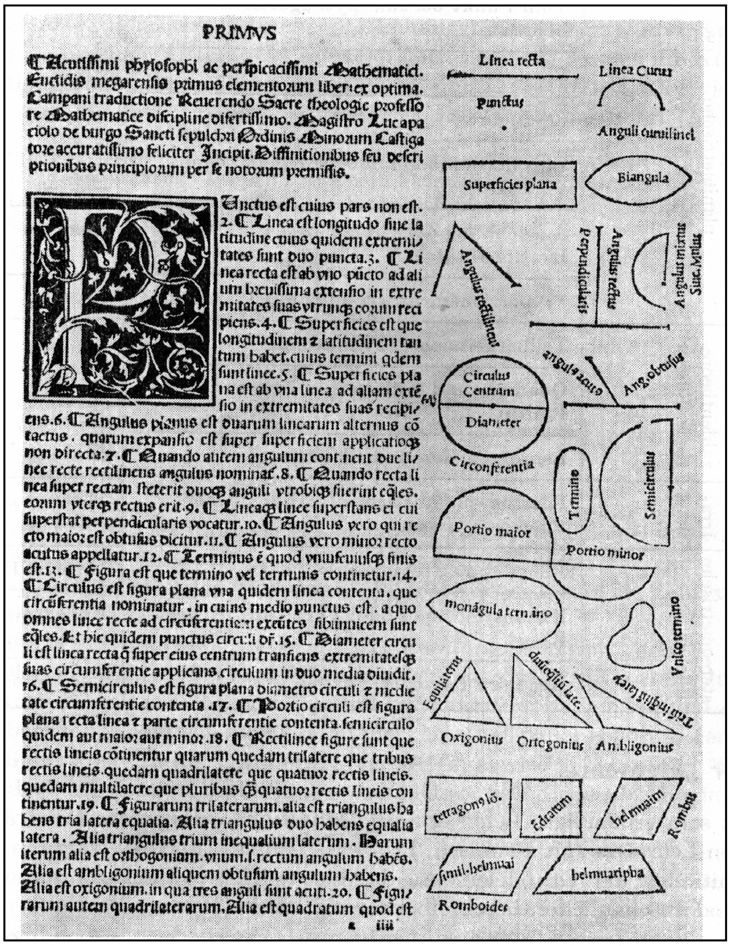


Abbildung 1:Druckausgabe der ELEMENTE, Venedig 1509. Anfang des Buches I

1.3 Der Mathematiker Euklid

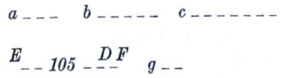

Abbildung 2: Kupferstich von Euklid

Euklid hat Beachtliches geleistet, aber wer war dieser Mann? Wir wissen heute über Euklid nur sehr wenig. Selbst seine Lebensdaten sind sehr unsicher. Die am häufigsten genutzte Angabe ist 365 – 300 v. Chr..Wir wissen außerdem, dass er griechischen Ursprungs ist und in Alexandria gestorben ist. Er lebte etwa eine Generation vor Archimedes und eine nach Aristoteles. Wie in der Einleitung schon erwähnt, war Euklid ein Befürworter der Platon'schen Philosophie. Mit großer Wahrscheinlichkeit war er Schüler an der Akademie des Platon in Athen, wo Euklid später an einer eigens eröffneten Akademie, namens Museion, Geometrie lehrte. Es wird auch erwähnt, dass er in Athen den Text der ELEMENTE niederschrieb. Sicheres über Euklid erfährt man in den Werken des Proklos, der rund achthundert Jahre später als Euklid lebte. Proklos berichtet in seinen Werken, speziell in seinem berühmten „Geometerkatalog", über die gesamte griechische Mathematik der hellenistischen Zeit (336 – 30 v. Chr.). Er verfasste einen umfangreichen Kommentar über Buch I der ELEMENTE. Weitere Werke Euklids sind z.B. die „Data", die sich mit planimetrischen Sachverhalten auseinandersetzt und die „Phaenomena", die sich mit Astronomie befasst. Die „Optica", die, wie der Name schon sagt, physikalischen Charakter hat, setzt sich aber auch mit Perspektive auseinander. Euklid hielt sich allerdings in jedem seiner Bücher an den vorgeschriebenen Lehrstoff der Platonischen Schule und widmete jedem Lehrfach eines seiner Werke. Die vier Lehrfächer der Schule Platons waren: Geometrie, Arithmetik, Harmonierlehre und Astronomie. Euklid verschrieb sich jedoch der Geometrie. Das Wort „Geometrie" kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Erdvermessung". Erst Thales begann im 6. Jh. v. Chr., die Geometrie als mathematische Disziplin anzuerkennen. Sie wurde zum Gegenstand des Nachdenkens und blieb also nicht länger ein Sammelsurium gewisser Techniken, sondern wurde ein nach den Regeln der Logik konstruiertes Gedankengebäude. Euklid legte hier einen inhaltlichen Schwerpunkt für die ELEMENTE.

1.4 Quellen für Euklids ELEMENTE

Das Problem, das in der antiken beweisenden Mathematik immer wieder auftritt, ist, dass man die Quellen nicht eindeutig bestimmen kann. Es gibt Leute, die die mathematische Vorarbeit leisteten und dann gibt es die, die es einfach systematisierten, zu denen auch Euklid gehörte. Er verwandte die Arbeit von anderen und schrieb diese auf, was nicht heißt, dass man ihn nicht Mathematiker nennen kann, denn sein Widerspruchsbeweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, ist heute noch legendär. Hier ein Auszug aus den ELEMENTEN (Buch IX , §20):

{„Die vorgelegten Primzahlen seien a,b,c. Ich behaupte, daß es mehr Primzahlen gibt als a,b,c.
Man bilde die kleinste von a,b,c gemessene Zahl (VII, 36); sie sei DE und man füge zu DE die Einheit DF hinzu. Entweder ist EF dann eine Primzahl, oder nicht. Zunächst sei es eine Primzahl. Dann hat man mehr Primzahlen als a,b,c, nämlich a,b,c, EF.



Zweitens sei EF keine Primzahl. Dann muß es aber von irgendeiner Primzahl gemessen werden; es werde von der Primzahl g gemessen. Ich behaupte, daß g mit keiner der Zahlen a,b,c zusammenfällt. Wenn möglich tue es dies nämlich. a,b,c messen nun DE; auch g müßte dann DE messen. Es misst aber auch EF. g müßte also auch den Rest, die Einheit DF messen, während es eine Zahl ist; dies wäre Unsinn. Also fällt g mit keiner der Zahlen a,b,c zusammen; und es ist Primzahl nach Voraussetzung.
Man hat also mehr Primzahlen als die vorgelegte Anzahl a,b,c gefunden, nämlich a,b,c,g - q.e.d.“}

[Q8], S.204f.§20(L.18) (Umformulierung: S.26)

Wie man sehen kann, ist das kein einfacher Beweis. Er geht auf Euklid persönlich zurück. Wir wissen jedoch heute, dass er Dinge von anderen übernommen hat. Die Bücher I-IV und XI gehen auf die Mathematik der ionischen Periode (ca. 700 – 500 v. u. Z.) zurück und hier insbesondere auf die Pythagoreer[1]. Ein Beispiel wäre der Satz des Pythagoras, den Euklid mit Beweis übernommen hat (s. Buch I, §47). Weiterhin haben die zahlentheoretischen Bücher VII bis IX auch ihren Ursprung bei den Pythagoreern. Euklid übernahm auch die Arbeiten von einem berühmten Mathematiker, namens Eudoxos, der den Inhalt der Bücher V und XII zu verantworten hat. Er lebte ≈ 400 bis ≈ 347 v. u. Z. und war Mathematiker und Astronom. Ein weiterer Mathematiker, auf den zwei Bücher aus den ELEMENTEN zurückgehen, ist Theaitetos. Er lebte ≈ 417 bis ≈ 368 v. u. Z., lebte und wirkte in Athen und war „geistiger Vater“ der Bücher X und XIII in Euklids ELEMENTEN. Eine Zusammenfassung:

Ionische Periode, Pythagoreer	Theaitetos	Eudoxos
Bücher I, II, III, IV, VII, VIII, IX und XI	Bücher X und XIII	Bücher V und XII

Tabelle 1: Herkunft des Inhalts der ELEMENTE

[1] Eine von Pythagoras gegründete politisch- religiöse Gemeinschaft mit der Ideologie, die Weltordnung sei mathematischer Natur.

Zu erwähnen wäre noch, dass Buch XIII die Platonischen Körper enthält. Denkbar wäre nun, dass Platon der Urheber ist. Die historischen Dokumente bestätigen jedoch, dass sie Theaitetos' Werk sind (siehe Kapitel 5.2). Wie nun bei genauerer Betrachtung auffällt, ist Buch VI oben nicht vertreten. Der Urheber dieses Buches bleibt bis heute unbekannt.

2 Kurze Betrachtung des Inhalts der ELEMENTE

2.1 Überblick über die XIII Bücher

Wie aus den obigen Betrachtungen hervorgeht, handelt es sich um XIII Bücher, die unterschiedliche Themen behandeln. Tabelle 2 dient dem groben Überblick und enthält außerdem die in 1.4 besprochenen Quellen. Auffallend ist der logische Aufbau. Daher rührt auch die Bedeu – tung des griechischen Originaltitels STOICHEIA. Er bedeutet zunächst Reihenglieder, dann übertragen Grundbe – standteile, aus denen sich Zusammenge – setztes aufbaut.

Buch		Inhalt	Inhaltlich herrührend von
I	planimetrische Bücher	Vom Punkt bis zum **pythagoreischen** Lehrsatz	Ionische Periode, insbesondere Pythagoreer
II		Geometrische Algebra	
III		Kreislehre	
IV		Ein- und umbeschriebene **regelmäßige** Vielecke	
V		Ausdehnung der **Größenlehre auf** Irrationalitäten	Eudoxos
VI		Proportionen, Anwendung auf **Planimetrie**	?
VII	zahlentheoretische Bücher	Teilbarkeitslehre, Primzahlen	Pythagoreer
VIII		Quadrat- und Kubikzahlen, geometrische Reihen	
IX		Lehre von Gerade und Ungerade	
X	Irrationalitäten	Klassen quadratischer **Irrationalitäten**, Flächenlegungen	Theaitetos
XI	stereometrische Bücher	Elementare Stereometrie	ionische Periode
XII		Exhaustionsmethode: **Pyramide, Kegel,** Kugel	Eudoxos
XIII		Reguläre Polyeder	Theaitetos

Tabelle 2: Inhalt und Ursprung der einzelnen Bücher der ELEMENTE

Zur Betrachtung, der für uns hier wichtigen Bücher, kommen wir im nun folgenden Kapitel.

3 Die geometrischen Bücher I – IV

3.1 Betrachtung des Inhalts der Bücher I – IV

Die ersten vier Bücher der ELEMENTE beschäftigen sich mit elementarer Planimetrie. Buch I gibt zunächst die beweislos anzuerkennenden Grundsätze, die in der Einleitung schon erwähnt wurden, wieder. Sie bilden das Axiomensystem. Dann setzt Buch I fort, wie alle XIII Bücher: es werden mathematische Sätze genannt und bewiesen. In der modernen Mathematik bezeichnet man sie auch als Algorithmen. Die Beweise schließen mit „q.e.d.“

ab. Diese heute weit verbreitete Abkürzung steht für „QUOD ERAT DEMONSTRANDUM“ (Euklid) und bedeutet: *Was zu beweisen war.* In Buch I beschränkt man sich auf die Kongruenzlehre (§ 1 – 26), die Parallelentheorie (§ 27 – 32), die Hauptsätze über das Parallelogramm und die Lehre von der Flächengleichheit (§ 33 – 48). Über das Axiomensystem wird in Kapitel 3.2.2 berichtet, wo auch spezifisch klar wird, welche Bedeutung die Begriffe Definition, Axiom und Postulat hier haben sollen. In Buch I haben Sätze, wie z.B. der allgemein bekannte Satz des Pythagoras (§47) oder die Strahlensätze, ihr zu Hause. Weiterhin geht es hierbei um die elementaren Eigenschaften des Dreiecks, wie die Kongruenz zweier Dreiecke oder einfache Konstruktionsanweisungen, wie sie z.B. beim Halbieren einer Strecke (§ 10) oder eines Winkels (§ 9) erforderlich sind. Buch II legt Grundlagen für das, was man später als geometrische Algebra bezeichnet, die ihrerseits auf die Pythagoreer zurückgeht. Es werden also geometrisch allgemeine Größenbeziehungen gelehrt, wie wir sie durch Formeln der Buchstabenrechnung auszudrücken pflegen. Beispielsweise ist das Produkt zweier Zahlen $a \cdot b$ nichts anderes als die Fläche eines Rechtecks mit den Seiten a und b. Buch III lehrt die vollständige Geometrie des Kreises. Zu sagen ist allerdings, dass einige Eigenschaften des Kreises schon in Buch I verwandt wurden. Buch IV hingegen widmet sich der einem Kreis in- und umbeschriebenen regulären Polygone (Vielecke).

3.2 Aufdeckung von inhaltlichen Schwächen

3.2.1 Exkurs: Der Perfektionismus im Axiomensystem

Die Qualität eines Axiomensystems zu beurteilen, ist nicht einfach. Man prüft heute, ob das System die folgenden Bedingungen erfüllt:

- *Widerspruchsfreiheit: es darf nicht möglich sein, durch deduktives Schließen aus den Axiomen das Negat eines der Axiome oder einen Satz und seine Negation herzuleiten.*
- *Vollständigkeit: ein Axiomensystem ist vollständig, wenn aus ihm alle Sätze der Disziplin[2] hergeleitet werden können.*
- *Unabhängigkeit: es darf keine Aussage als Axiom aufgenommen werden, die aus den übrigen Axiomen herleitbar ist.* [Q6], S.50

[2] Disziplin ist in unserem Fall auf die Geometrie bezogen.

Normalerweise zählt man noch eine vierte Forderung hinzu, nämlich die der Kategorizität. Sie ist aber für unsere Zwecke uninteressant und muss deshalb hier nicht definiert werden. All diese Forderungen muss ein Axiomensystem erfüllen. Wie sich noch heraus – stellen wird, ist das beim Euklidischen nicht der Fall. Allerdings kam es auch erst durch David Hilbert zur Einführung dieser Kriterien, so konnte Euklid sie natürlich nicht beachten. Der Nutzen der Axiomatisierung besteht vordergründig darin, eine einheitliche Erklärung für verschiedene Problemstellungen zu finden. Hierbei muss der axiomatische Inhalt durch eine offensichtliche Richtigkeit gerechtfertigt sein, so dass man ihn als unbeweisbar an – nehmen kann. Die Theoreme sind hierbei für den Leser nicht neu, aber kritisierbar.

3.2.2 Das Axiomensystem Euklids

Obgleich dieses Axiomensystem die o.g. Voraussetzungen nicht erfüllt, so war es Euklid, der zuerst den bedeutenden Versuch machte, ein solches System zu postulieren. Sämtliche Kritik oder Verbesserungen wären also an dieser Stelle mit Sicherheit unangebracht. Dennoch ist es fehlerhaft. Widmen wir unsere Aufmerksamkeit erst einmal dem Aufbau. Zunächst teilt er seine geometrischen Grundaussagen[3] in Kategorien auf:

- die Definitionen;
- die Axiome;
- die Postulate.

Jede von ihnen hat eine separate Bedeutung. Es gilt z.B. für Axiome und Postulate:

> „Die Grenze zwischen beiden Arten von Grundsätzen fließt; schon im Altertum haben Umstellungen stattgefunden. In der Hauptsache ist ein Postulat (AITEMA, Forderung) ein speziell geometrischer Grundsatz, der die Möglichkeit einer Konstruktion, die Existenz eines Gebildes sicherstellen soll: ein Axiom (für wahr Gehaltenes) – der überlieferte Euklid-Text selbst hat den weniger gebräuchlichen Ausdruck KOINE ENNOIA (allgemein Eingesehenes) - ist ein allgemein logischer Grundsatz, den kein Vernünftiger, auch wenn er von der Geometrie nichts weiß, bestreitet.“.
>
> [Q8], S.419 (Anmerkungen)

Mit Hilfe der Definitionen gibt er allen Begriffen eine Bedeutung, die er für erklärbedürftig

[3] Bei Euklid gibt es die Begriffe Axiom oder Postulat noch nicht. Begriffliche Klarheit schuf erst Pasch im 19.Jh. Euklid nennt das Axiom „Koine Ennoia“ und das Postulat „Aitema“ (s.o.).

hält. Zum Beispiel definiert er in Buch I den Begriff des Punktes: „EIN PUNKT IST, WAS KEINE TEILE HAT." ([Q8], I. Buch,S.1, 1. Definition). Dies ist keine aufschlussreiche Aussage, aber sie genügt Euklid. Dann werden die Postulate formuliert. Postulate sind Grundaussagen, die sich auf die Geometrie beziehen und Eigenschaften von z.B. dem Punkt definieren: {„GEFORDERT SOLL SEIN: 1. DAß MAN VON JEDEM PUNKT NACH JEDEM PUNKT DIE STRECKE ZIEHEN KANN, [...]."} ([Q8], I. Buch, S.2, 1. Postulat). Euklids Postulate beschreiben die Welt, wie er sie vorfindet und versuchen, die Grundmuster der Natur einzufangen. Die Axiome hingegen sind Grundaussagen, die Euklid auf alle Wissenschaften anwenden wollte. Er formuliert an der Zahl neun. Hier eines davon: {„WAS DEMSELBEN GLEICH IST, IST AUCH EINANDER GLEICH."} ([Q8], I. Buch, S.3, 1. Axiom). Inwiefern dieses Axiomensystem den Ansprüchen der Mathematik nicht genügt, wird sich nun herausstellen. Bevor intensiv auf das „Parallelenpostulat" eingegangen wird, wäre zu sagen, dass es noch weitere Schwächen im Euklidischen Axiomensystem gibt. Die Definitionen der Begriffe Punkt, Strecke, usw. sind unzureichend und ungenau und genügen nicht der logischen Exaktheit. So definiert Euklid den Begriff „Punkt", als „DAS, WAS KEINE TEILE HAT". Der Begriff „Teil" ist seinerseits überhaupt nicht definiert worden. Mit einer solchen Definition ist es geradezu unmöglich, mathematische Sätze zu beweisen. Es wurde zwar die erste Manifestation einer axiomatischen Methode anerkannt, dennoch wurde Euklid immer wieder für sein Werk kritisiert. Kolmogorov behauptete beispielsweise, dass es seinen Axiomen an sprachlicher Exaktheit mangele. Die Nachfolger Euklids kritisierten ihn zwar, doch werden sie ihm seine beachtliche Leistung, den ersten bedeutenden Versuch in Richtung Axiomatisierung gemacht zu haben, nicht absprechen können. Das Problem lag vielmehr in der Annahme, dass die Geometrie, die Euklid durch seine Axiome zu fassen versuchte, wirklich die Geometrie unserer Welt ist – eine Annahme die beispielsweise Immanuel Kant und viele andere als ganz grundlegend ansahen. Doch Euklids Axiomensystem begeht in seinem Aufbau einen weiteren Verstoß – Es ist nicht widerspruchsfrei. Der nächste Abschnitt wird dies zeigen.

3.2.3 „Das Parallelenpostulat"

Nun zum Begriff des „Parallelenpostulats". Im vollständigen Wortlaut postuliert es,

{„DASS, WENN EINE GERADE LINIE BEIM SCHNITT MIT ZWEI GERADEN LINIEN BEWIRKT, DASS INNEN AUF DERSELBEN SEITE ENTSTEHENDE WINKEL ZUSAMMEN KLEINER ALS ZWEI RECHTE WERDEN, DANN DIE ZWEI

GERADEN LINIEN BEI VERLÄNGERUNG INS UNENDLICHE SICH TREFFEN AUF DER SEITE, AUF DER DIE WINKEL LIEGEN, DIE ZUSAMMEN KLEINER ALS ZWEI RECHTE SIND."}.

[Q8], S.3, Postulat 5

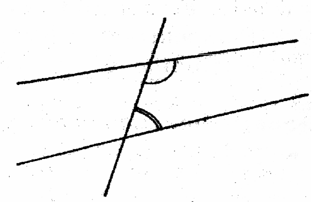


Abbildung 3: Zur ursprünglichen Fassung des „Parallelenpostulats"

Im Gegensatz zu den Postulaten, die in den ELEMENTEN vorher erwähnt werden, ist jenes im Stil völlig anders. Die ersten drei fixieren die Konstruktionshilfsmittel auf Lineal und Zirkel. Sie sind relativ kurz. So auch das vierte Postulat, welches bestimmt, dass „ALLE RECHTEN WINKEL EINANDER GLEICH SIND" ([Q8], S.3, Postulat 4). Das fünfte allerdings ist in seinem Erscheinungsbild schon sehr lang und scheint auch im Wortlaut sehr komplex. Zu einer detaillierten Betrachtung dürfte eine Skizze des Inhalts hilfreich sein, die den Wortlaut verdeutlicht (siehe Abbildung 3). Bei der Betrachtung der Skizze und des Postulats fällt auf, dass beide nicht dasselbe Maß an Verständlichkeit und Anschaulichkeit besitzen. Mögliche einfachere Formulierungen wären:

„DURCH EINEN GEGEBENEN PUNKT GIBT ES NUR GENAU EINE ZU EINER GEGEBENEN GERADEN PARALLELE GERADE." oder „ZWEI GERADEN IN DER EBENE, DIE GEGENEINANDER GENEIGT SIND, MÜSSEN SICH SCHLIEßLICH SCHNEIDEN.".

[Q17], S.198

Somit wird die Existenz einer Parallelen gesichert. Die Aussage, dass genau eine Parallele existent ist, postulierte Euklid. Aber wieso verstößt Euklids Axiomensystem nun gegen eine der Vorschriften? Viele Mathematiker beschäftigten sich seit über 2000 Jahren mit diesem Postulat. Ein Ziel aller war es, das „Parallelenpostulat" als Theorem zu verstehen und es aus den übrigen Axiomen zu beweisen. Alle Versuche schlugen fehl. Man wusste nur eines: das „Parallelenpostulat" ist für die euklidische Geometrie unentbehrlich. Es wird beispielsweise zum Beweis der Strahlensätze, des Innenwinkelsummensatzes für Dreiecke, der Satzgruppe des Pythagoras und bei anderen verwendet. Wir wissen seit Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie, dass es unmöglich ist, das fünfte Postulat zu beweisen. Das heißt, das Axiomensystem scheitert nicht an der Unabhängigkeit. Beim Punkt der Vollständigkeit sind wir an einem Streitpunkt angelangt. Wie bereits in Kapitel 3.2.2 beschrieben, sind Euklids Definitionen sehr „unsauber" und nicht eindeutig genug. Da die Definitionen zum Axiomensystem gehören, ist es schwierig mit einer solchen Definition, wie oben beschrieben, Sätze zu beweisen und herzuleiten. Man könnte daher sagen, dass Euklids Axiomensystem unvollständig ist.

Unbestritten ist jedoch, dass man es geschafft hat, die Widerspruchsfreiheit zu widerlegen. Es gelang im Laufe der Zeit, das Negat des „Parallelenpostulats" herzuleiten und damit aufzuzeigen, dass Euklids Axiomensystem den Ansprüchen nicht genügt. Es wurde also ein indirekter Beweis geführt. Einen Versuch machte der italienische Mathematiker Saccheri (1667 – 1773). Im Jahre 1733 veröffentlichte er eine Schrift über Euklid, in der er sich u.a. dem Problem des „Parallelenpostulats" annahm (siehe Kapitel 4.1). Seine Argumentation ist allerdings fehlerhaft. Das zeigte Riemann im Jahr 1854. Seitdem ist Saccheris Arbeit unbrauchbar.

4 Die Entwicklung einer „neuen" Geometrie: Auf dem Wege zur nichteuklidischen Geometrie

4.1 Das Saccheri – Viereck und seine Bedeutung

Die heute so genannte Figur des Saccheri – Vierecks geht eigentlich auf die Araber zu – rück. Ein Mathematiker namens ᶜUmar al – Ḫayyām (1048 – 1131) untersuchte bereits zu seiner Zeit das Viereck, das aus einer gegebenen Strecke AB besteht, in deren Endpunk – ten man zwei gleichlange Strecken AC und BD konstruiert. Er führt nun zunächst den Be – weis, dass die beiden oberen Winkel, die durch die Verbindung der Endpunkte der Strecken AC und BD entstehen, gleich groß sind. Und nun bleiben für die Größe der Winkel nur drei Möglichkeiten (Die Annahmen 1 und 3 entsprechen den oben angesprochenen Negaten.):

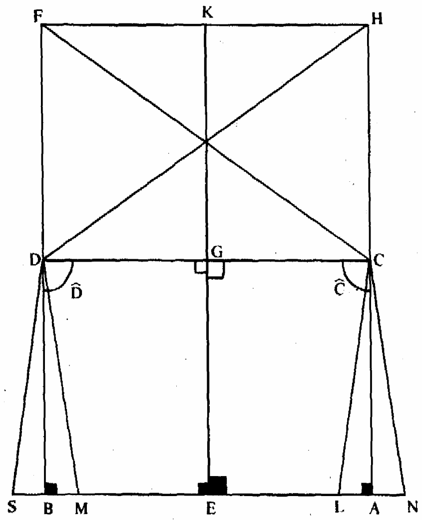
1. die Winkel sind kleiner als 90°;
2. die Winkel sind gleich 90°;
3. die Winkel sind größer als 90°.

Nach Euklid musste die zweite Annahme gelten. Dies bewies er nicht direkt. Er konnte lediglich zeigen, dass etwas Falsches folgt, wenn die Winkel stumpf sind. Den spitzen Winkel betreffend kam Euklid zu einem nicht zufrieden stellenden Ergebnis. Saccheri führte Euklids Arbeiten fort und schlussfolgerte aus Postulat 2: „MAN KANN EINE BEGRENZTE, GERADE LINIE ZUSAMMENHÄNGEND GERADE VERLÄNGERN" ([Q8], S.2, Postulat 2), dass gerade Linien unendlich lang sind. Riemann zeigte 1854, wie oben beschrieben, dass diese Annahme nicht gerechtfertigt ist. Somit ist Saccheris Beweis unvollständig, die Theorie des spitzen Winkels nicht vollständig und die Gültigkeit des „Parallelenpostulats" unbestritten. Saccheri brachte jedoch frischen Wind in die Debatte um das sagenumwobene fünfte Postulat, bis sich Größen, wie z.B. Carl Friedrich Gauß, dieser Herausforderung annahmen.

<table>
<tr><th>Argumentation von ᶜUmar al – Ḫayyām</th><th>Argumentation von Saccheri</th></tr>
<tr><td>

9. Das Saccheri-Viereck bei ᶜUmar al-Ḫayyām (11. Jahrhundert)

Beweis für die Gleichheit der Winkel $\hat{C} = \hat{D} = \frac{\pi}{2}$ ($\hat{D}$ ist der Winkel mit Scheitel in D).



ᶜUmar al-Ḫayyām errichtet auf der Strecke BA die Mittelsenkrechte EG. Er zeigt dann, daß diese auch senkrecht auf DC steht und daß sie diese Strecke halbiert. Er verlängert die Mittelsenkrechte bis zu einem Punkt K, der durch die Bedingung $GK = EG$ festgelegt wird. Nun verlängert er die Seiten AC und BD.

Senkrecht zu EK konstruiert er die Strecke FH, wobei die Punkte F und H sich als Schnittpunkte der Senkrechten mit den verlängerten Seiten AC und BD ergeben.

In dem Viereck $CDFH$ sind die Diagonalen gleichlang. Nun spiegelt er die Figur an der Achse CD:

Sind $\hat{C}$ und $\hat{D}$ spitze Winkel (Annahme 1), so wird die Strecke HF zur Strecke SN. Diese ist größer als AB; sind $\hat{C}$ und $\hat{D}$ stumpfe Winkel (Annahme 2), so wird HF zu LM, was kleiner als AB ist.

Dann spiegelt er die ganze Figur an AB.

- Unter der Annahme der spitzen Winkel ergeben sich zwei Senkrechten zu AB, die zusammenlaufen; nämlich BF und AH.
- Unter der Annahme der stumpfen Winkel entfernen sich diese beiden Senkrechten auf beiden Seiten von AB voneinander.

Zwei Senkrechten auf ein und derselben Geraden sind aber immer gleichweit voneinander entfernt. Also führen beide Annahmen zu einem Widerspruch.

[Q5], S.157

</td><td>Saccheri, euklidisch denkend, ging davon aus, dass bei einer Verlängerung der Geraden AC und BD ins Unendliche, jene sich entweder in einem stumpfen oder spitzen Winkel schneiden müssen. Das war aber die euklidische Denk – weise und mit ihr zu argumentieren, war Saccheris Fehler. Saccheri kam zu dem Schluss, dass die Geraden eine end – liche Länge haben müssen. Er allerdings hielt diesen völlig korrekten Schluss für einen Widerspruch und interpretierte die Hypothese des stumpfen Winkels als widerlegt, so dass es ihm nicht gelang, das „Parallelenpostulat“ zu widerlegen.</td></tr>
</table>

4.2 Die Vertreter der hyperbolischen Geometrie

4.2.1 C.F. Gauß und die nichteuklidische Geometrie

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) ist als ein großartiger Mathematiker bekannt geworden. In seiner Denkweise, die Geometrie betreffend, ging er einen wichtigen Schritt. Er ak –

Abbildung 4: Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

zeptierte die nichteuklidischen Geometrien als wahr. Es ging hierbei also um Geometrien, die die Negation des „Parallelenpostulats“ implizierten und es somit als unbeweisbar geltend machten. Gauß jedoch war nur eine Figur des Übergangs, da er keine Bücher oder Abhandlungen über nichteuklidische Geometrien hinterließ. Er stand jedoch in Briefkontakt mit Leuten wie Bessel und Schumacher. In einem Brief an Bessel von 1829 schrieb er, dass er „das Geschrei des Böotier“[4] fürchtete. Gauß hatte also eine eindeutige Position bezüglich des „Parallelenpostulats“. In Gauß’ Tagebuchaufzeichnungen von 1817 macht er seinen Standpunkt wie folgt deutlich:

„ICH KOMME MEHR ZU DER ÜBERZEUGUNG, DASS DIE NOTHWENDIGKEIT UNSERER GEOMETRIE NICHT BEWIESEN WERDEN KANN, WENIGSTENS NICHT VOM MENSCHLICHEN VERSTAND NOCH FÜR DEN MENSCHLICHEN VERSTAND. VIELLEICHT KOMMEN WIR IN EINEM ANDEREN LEBEN ZU ANDEREN EINSICHTEN IN DAS WESEN DES RAUMS, DIE UNS JETZT UNERREICHBAR SIND. BIS DAHIN MUß MAN DIE GEOMETRIE NICHT MIT DER ARITHMETIK, DIE REIN A PRIORI STEHT, SONDERN ETWA MIT DER MECHANIK IN GLEICHEN RANG SETZEN…“. [Q11], Bd. VIII, S.177

Mit diesem Zitat wird deutlich, wie komplex das oben besprochene Problem für Gauß oder, besser gesagt, für die Mathematik war. Er hinterließ zwar keine mathematischen Abhandlungen, seine Denkweise war aber maßgeblich für die Entwicklung der Mathematik.

4.2.2 J. Bolyai und N.I. Lobatschewskij und die nichteuklidische Geometrie

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewskij (1793 – 1856) und Janos Bolyai (1802 – 1860) gelten beide als Begründer der nichteuklidischen Geometrie. Beide vertraten Gauß’ Meinung, sie versuchten jedoch, ihre Arbeiten zu publizieren. Wichtig ist, dass beide unabhängig von einander das entdeckten, was später bekannt wurde. In den Naturwissenschaften und in der

[4] Das bedeutet in diesem Zusammenhang: „Das Geschrei der Öffentlichkeit“.

Mathematik kommt es öfter vor, dass zwei Wissenschaftler etwas Gleiches zur selben Zeit entdecken. Das wohl bekannteste Beispiel hierfür ist das Periodensystem der Elemente, dass durch den Russen Dimitrij I. Mendelejew und den Deutschen Lothar Meier begründet worden war, und zwar auch ohne von den Arbeiten des Anderen zu wissen. Der Vater Bolyais riet seinem Sohn ab, sich mit dem Problem der Parallelentheorie zu beschäftigen. Er wusste genau, welche Probleme das mit sich bringen würde. Er drückte es als einen Kampf auf einem „unheimlichen Schlachtfeld“ aus. Bolyai schien jedoch die nichteuklidische Geometrie zu begreifen. Er veröffentlichte in einem Buch seines Vaters von 1832 eine kleinere Abhandlung über das „Parallelenpostulat“, die als Anhang keinen großen Erfolg fand. Deswegen blieb Bolyai auch ein ziemlich unbedeutender Mathematiker. Heute wird man Bolyai jedoch den notwendigen Respekt erweisen und seinen Namen nicht „unter den Teppich kehren“.

Lobatschewskij hingegen machte seine Arbeit direkt öffentlich und den mutigen Schritt, sie selbst zu publizieren. Die mathematische Arbeit Lobatschewskijs wollen wir hier ein bisschen stärker durchleuchten. Er untersuchte den Fall, dass die Winkel im Saccheri – Viereck kleiner als 90° sind oder, anders gesagt, spitz sind. Zunächst mal untersuchte er alle Sätze der euklidischen Geometrie, die nicht auf dem „Parallelenpostulat“ beruhen. Schließlich formulierte es neu im folgenden Wortlaut:

> „Bezüglich einer Geraden *AB* und einem gegebenen Punkt R lassen sich alle in der Ebene verlaufenden und durch R gehenden Geraden in zwei Klassen einteilen: Jene Graden, die *AB* schneiden, und jene, die *AB* nicht schneiden“.
>
> [Q5], S.159

Zur Anschauung dient die folgende Abbildung:

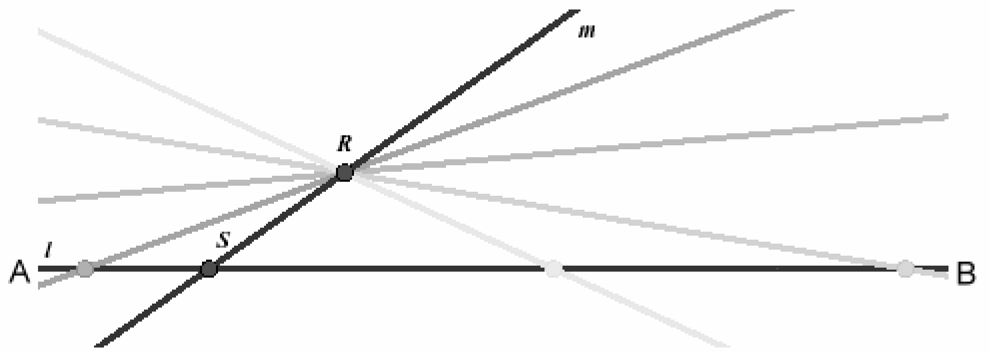


Abbildung 5: Schleifende Schnitte von Geraden verschwinden im Unendlichen

Damit stellt Lobatschewskij die Behauptung auf, dass Geraden, die im euklidischen Sinne nicht parallel sind, es doch sind. Aber welche Geraden sind jetzt parallel und welche nicht? Die Antwort ist im Saccheri – Viereck zu suchen. Wie schon erwähnt, ist Lobatschewskij der Überzeugung, dass die Theorie der spitzen Winkel zutreffend ist. Dem zu Folge ist jede Gerade, die *AB* im spitzen Winkel schneidet, zu *AB* parallel. Für den Fall, dass durch R eine Waagerechte verläuft, würde das „Parallelenpostulat“ nach Euklid wieder gelten. Eine eigentlich völlig fremde und nicht vorstellbare Theorie wurde hiermit in die Welt gesetzt. Sie widersprach aber Euklids Axiomensystem, da die Negation des „Parallelenpostulats“ Grundlage war. Euklids Axiomensystem enthält somit Widersprüche und kann damit verworfen werden. So gelang es Lobatschewskij , zahlreiche wichtige Sätze aufzustellen und zu beweisen, die aber der bisherigen Vorstellung widersprachen:

- die Winkelsumme im Dreieck ist kleiner als zwei rechte Winkel;
- zwei ähnliche Dreiecke sind kongruent.

Lobatschewskij veröffentliche im Jahre 1840 eine Abhandlung mit dem Titel „Geometrische Untersuchung zur Theorie der Parallellinien“, die allerdings nicht den gewünschten Erfolg hatte. Die Tatsache, von der er ausging, war noch zu umstritten und fremd. Gauß jedoch erkannte seine Leistung an. Lobatschewskij äußerte sich selbst dazu:

> „[…] Die erste Voraussetzung (in allen geradlinigen Dreiecken ist die Summe der Winkel 180°, Wg)dient als Grundlage der gewöhnlichen Geometrie und der ebenen Trigonometrie. Die zweite Voraussetzung (Winkelsumme < 180°, Wg) kann ebenfalls zugelassen werden, ohne auf irgendeinen Widerspruch in den Resultaten zu führen und begründet eine neue geometrische Lehre, welcher ich den Namen: Imaginäre Geometrie gegeben habe, […]“.
> [Q12], S.73/74

Der Begriff der hyperbolischen Geometrie, wie sie heute treffend bezeichnet wird, kommt erst mit Felix Klein, der auch die Arbeiten Riemanns als elliptische Geometrie zusammenfasste. In den Abschnitten 4.3 und 4.4 wird darauf verstärkt eingegangen.

Abbildung 6: N.I. Lobatschewskij

Abbildung 7: J. Bolyai

4.3 B. Riemann als Begründer der elliptischen Geometrie

Abbildung 8:
B. Riemann

Bernhard Riemann (1826 – 1866) füllt die Lücke der nichteuklidischen Geometrien. Seine Arbeiten lassen sich aus dem Saccheri – Viereck und dem „Parallelenpostulat“ ableiten. Das Saccheri – Viereck betreffend nahm Euklid einen rechten Winkel an und Gauß, Bolyai und Lobatschewskij einen spitzen. Riemann nahm die noch übrige Möglichkeit des stumpfen Winkels, die das andere Negat zum „Parallelenpostulat“ bildet. Weiterhin ging er weder von einer Parallelen aus, noch von unendlich vielen. Er nahm an, dass es keine gibt. Mit diesem Material entwickelte er eine Geometrie, die auf der Krümmung von Flächen aufbaut. Jedoch genügte es nicht, einfach das „Parallelenpostulat“ wegzulassen oder es umzuformulieren, da bereits die Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome der euklidischen Geometrie die Existenz mind. einer nichtschneidenden Geraden sichern. Sollen also zwei Geraden immer einen gemeinsamen Punkt haben, wie es das „Parallelenpostulat“ fordert, müssen bereits diese Axiomengruppen angepasst werden. Die sphärische Geometrie impliziert ein Modell der elliptischen Geometrie. Als elliptische Ebene versteht man eine Kugeloberfläche, wobei die Geraden die Großkreise der Kugel sind. Zwei dieser Geraden haben nun immer einen gemeinsamen Punkt, wobei dieser Punkt sich aus zwei, sich diametral gegenüberliegenden, Kugelpunkten zusammensetzt. Die Punkte (N,S) und (M,T) bestimmen genau eine Gerade, nämlich (*N M S T*). Man kann nun von (N,S) unendlich viele Lote nach (*M O T P*) fällen. Die Entfernung zweier Punkte der elliptischen Geometrie ist also in diesem Falle der kleinere Bogen des Großkreises, der zwischen ihnen liegt, so ist $\frac{\pi}{2}$ der größtmögliche Abstand. Das ist zutreffend, denn laut Hypothese des stumpfen Winkels ist die Innenwinkelsumme eines Dreiecks der elliptischen Geometrie größer als zwei rechte, also 180°. Basierend darauf ließ sich eine Geometrie ohne Parallelen entwickeln. Riemann fasste dies in seinem Habilitationsvortrag von 1854 zusammen. Er trug den Titel: „Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“. Bei der euklidischen Geometrie gibt es so etwas wie Krümmung auf Flächen nicht. Gauß',

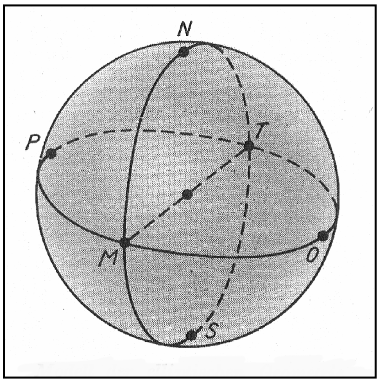


Abbildung 9: Modell der elliptischen Geometrie

Bolyais und Lobatschewskijs Geometrie weißt eine konstante negative Krümmung auf Flächen auf. Die hyperbolische Geometrie reagierte auf Riemanns Arbeiten erst nach seinem Tod. Der Italiener Beltrami (1835 – 1900) zeigte um 1870 eine Fläche mit konstanter negativer Krümmung auf, bei der es trotzdem unendlich viele Parallelen gab.

4.4 Die Synthese: Das Erlanger Programm

Durch die nun entstandene Vielzahl an oben beschriebenen Geometrien und jenen, die hier noch nicht verarbeitet wurden, wie z.B. die projektive Geometrie[5], entstand ein ziemliches Durcheinander an Geometrien und Abhandlungen. Ab Mitte des 19. Jahrhunderts war die Entwicklung dieser Geometrien weitestgehend abgeschlossen. Es entstand eine gewisse Divergenz im Zusammenhang zwischen den einzelnen Geometrien, dem Verständnis für sie und der Methodik, sie anzuwenden. Gelöst wurden diese Probleme durch das Erlanger Programm. Es brachte die Systematisierung und Klassifizierung der Geometrie durch die Methode der Gruppentheorie. Proklamiert wurde es durch den Mathematiker Felix Klein (1849 – 1925), durch den auch die Namensgebung des Erlanger Programms wesentlich beeinflusst wurde, da er als Professor an der philosophischen Fakultät der Universität Erlangen arbeitete. Kleins Absicht war es, eine einheitliche Geometrie zu reproduzieren:

> „Mein Interesse war es schon von meiner Bonner Zeit [...] äußerlich einander unähnlicher und doch in ihrem Wesen nach verwandter Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen. Innerhalb der Geometrie gab es in dieser Hinsicht noch viel für mich zu tun.“.
>
> [Q13], Bd.1, S.52

Ein Vorgänger Kleins war August – Ferdinand Möbius (1790 – 1868), der bereits zu seiner Zeit die Eigenschaften der Geometrien untersuchte und versuchte sie gruppentheore – tisch darzustellen. Klein nahm Möbius' Arbeiten auf und strukturierte das Erlanger Programm mit seiner Hilfe. Er änderte den Begriff der Gruppe ab, da er vorher nur für die Zwecke der Permutation zu gebrauchen war. Jeder kleinere Abschnitt einer Geometrie wurde zu einer einzelnen Gruppe, so z.B. die Kongruenzabbildungen. Es musste jedoch jede Gruppe, koordiniert mit einer anderen, diese in sich enthalten. Daher bezeichnet man

[5] Die projektive Geometrie untersucht die Eigenschaften geometrischer Figuren, die beim Projizieren erhalten bleiben.

diese Gruppen als Transformationsgruppen. Ersetzt man nun eine Gruppe durch eine umfassendere Gruppe, bleibt ein Teil der geometrischen Eigenschaften erhalten. Gemäß diesem Prinzip schaffte es Klein, eine gewisse Ordnung in die Geometrie zu bringen. Abbildung 10 zeigt eine solche auf Gruppentheorie basierende Systematisierung der projektiven Geometrie. Aus Kleins Arbeiten ergab sich folgende Terminologie:

- *hyperbolische* Geometrie (Gauß, Bolyai, Lobatschewskij): In ihr schneidet jede Gerade den als Absolutum dienenden Kegelschnitt in zwei reellen Punkten (analog schneidet jede *Hyperbel* die Gerade im Unendlichen in zwei Punkten);
- *elliptische* Geometrie (Riemann): Sie bildet eine Analogie zwischen der gewöhn – lichen *Ellipse*, die einen leeren Durchschnitt mit der Ferngeraden hat, und den Geraden, die keine gemeinsamen reellen Punkte mit den Kegelschnitten haben;
- *parabolische* Geometrie (Euklid): Ihre Geraden schneiden die zugrunde liegenden Kegelschnitte (u.a. die *Parabel*) in einem einzigen reellen Punkt.

12. Die Invarianten der wichtigsten Untergruppen der projektiven Gruppe

Gruppe	Lage	Richtung	Orientierung	Abstand	Winkel	Parallelität	Kollinearität, Doppelverhältnis
Identität	•	•	•	•	•	•	•
Translationen		•	•	•	•	•	•
Bewegungen			•	•	•	•	•
Isometrien				•	•	•	•
Ähnlichkeitsabbildungen					•	•	•
Affinitäten						•	•
Projektionen							•

Abbildung 10: Die Invarianten der wichtigsten Untergruppen der projektiven Gruppe

4.5 Die Axiomatisierung durch D. Hilbert

Im Jahre 1899 war die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrien vollständig beendet. In diesem Jahr veröffentlichte David Hilbert (1862 – 1930) ein Axiomensystem, das alle Mängel des euklidischen beseitigte. Das „Parallelenpostulat“ war in seiner Arbeit, die sich „Grundlagen der Geometrie“ nannte, in der euklidischen Form nicht enthalten.

Diese Abhandlung beginnt wie folgt:

„ERKLÄRUNG. WIR DENKEN DREI VERSCHIEDENE SYSTEME VON DINGEN: DIE DINGE DES ERSTEN SYSTEMS NENNEN WIR PUNKTE UND BEZEICHNEN SIE MIT A, B, C, …; DIE DINGE DES ZWEITEN SYSTEMS NENEN WIR GERADEN UND BEZEICHNEN SIE MIT A, B, C, …; DIE DINGE DES DRITTEN SYSTEMS NENNEN WIR EBENEN UND BEZEICHNEN SIE MIT α, β, γ, …;“.[6]

[Q13], S.2

Im Vergleich zu Euklids Arbeit sieht man hier sehr gut das unterschiedliche Herangehen beider. Das Hilbertsche Axiomensystem beinhaltet die folgenden Axiomgruppen:

I. Acht Axiome der Verknüpfung;
II. Vier Axiome der Anordnung;
III. Fünf Axiome der Kongruenz;
IV. Das Axiom der Parallelen;
V. Zwei Axiome der Stetigkeit.


Abbildung 11: David Hilbert

Zurückgreifend auf das Euklidische „Parallelenpostulat“ lautet das Hilbertsche Axiom der Parallelen:

„ZU EINER GERADEN GIBT ES DURCH EINEN NICHT AUF IHR LIEGENDEN PUNKT HÖCHSTENS EINE GERADE, DIE DIE ERSTE NICHT SCHNEIDET.“.

[Q7], S.763

Hier ist ein hohes Maß an Verständlichkeit gegeben und im Bezug auf das Euklidische ist dieses Postulat auch leicht nachvollziehbar. So waren nun auch die Widerspruchsfreiheit und die Unabhängigkeit geltendes Maß, so dass der von Hilbert gebahnte Weg sich als erfolgreich erweisen konnte. Sein axiomatischer Aufbau der Geometrie brachte große Fortschritte und ist ein gelungener Ersatz für das Euklidische Axiomensystem.

5 Die Entwicklung des Raumbegriffs

5.1 Der euklidische Raum und die Entstehung einer neuen Raumvorstellung

Die euklidische Geometrie befasst sich hauptsächlich mit den Gebilden des Raumes und der Ebene. Der Raum gilt dabei als unbegrenzt und eigenschaftslos. Figuren und Körper sind ein Teil von ihm. Wie wir nun aber wissen, wurde die euklidische Betrachtungsweise der Geometrie zum Dogma erhoben. Gauß, Bolyai, Lobatschewskij und Riemann konstruierten in der nachfolgenden Zeit Geometrien, die nichteuklidisch waren. Riemann war der erste,

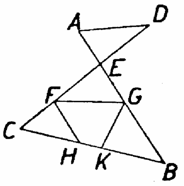
[6] Für die Griechen und besonders Euklid waren Begriffe wie „Geraden“, „Längen“ und „Winkel“ keine numerischen Größen. Sie wurden lediglich zur geometrischen Vorstellung verwendet. Hilbert änderte dies.

der die Natur des Raumes selbst zum Gegenstand der Untersuchung machte. Der Raum war, physikalisch betrachtet, dreidimensional und amorph (gestaltlos). Bedingt ist der Raum nur durch seinen materiellen Inhalt, der auch seine Metrik[7] definiert. Da die Körper ortsunabhängig sind, ist laut Riemann die Krümmung des Raumes konstant. Ein Körper erzeugt also ein metrisches Feld. Daraus folgt die Existenz von Wechselwirkung zwischen dem Raum und den in ihm enthaltenen Körpern. Die wohl berühmteste Untersuchung dieser Tatsache liefert die allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein, die besagt, dass die Welt ein vierdimensionales Kontinuum ist, dessen metrisches Feld von der Verteilung und Bewegung der Massen in ihm abhängt.

5.2 Der Raum in den ELEMENTEN: Die stereometrischen Bücher XI – XIII

§ 2 (L. 2).

Wenn zwei gerade Linien einander schneiden, liegen sie in einer Ebene; und jedes Dreieck liegt in einer Ebene.



Zwei gerade Linien AB, CD mögen einander im Punkte E schneiden. Ich behaupte, daß AB, CD in einer Ebene liegen, und daß jedes Dreieck in einer Ebene liegt.

Man nehme auf EC, EB beliebige Punkte F, G, verbinde C mit B, F mit G, und ziehe FH, GK hindurch (I, Post. 1).

Ich behaupte zunächst, daß das Dreieck ECB (I, Def. 19) in einer Ebene liegt. Würde nämlich von dem Dreieck ECB ein Teil, etwa FHC oder GBK in der Grundebene liegen und der Rest in einer anderen, dann müßte auch von einer der Strecken EC, EB ein Teil in der Grundebene liegen, ein Teil in einer anderen. Und läge vom Dreieck ECB der Teil $FCBG$ in der Grundebene und der Rest in einer anderen, dann müßte von beiden Strecken EC, EB je ein Teil in der Grundebene liegen, ein Teil in einer anderen; wie bewiesen, wäre dies Unsinn (XI, 1). Also liegt das Dreieck ECB in einer Ebene.

In der Ebene, in der das Dreieck ECB liegt, liegt auch sowohl EC als EB; und in der Ebene, in der EC, EB beide liegen, liegen auch AB und CD (XI, 1).

Die geraden Linien AB, CD liegen also in einer Ebene; und jedes Dreieck liegt in einer Ebene — q. e. d.

[Q8], S.317f. §2 (L.2)

Die abschließenden drei Bücher der ELEMENTE behandeln die räumlichen bzw. stereome – trischen Thematiken. Buch XI erweitert zunächst das Axiomensystem um neue Begriffe, wie z.B. den Begriff des Körpers: {„EIN KÖRPER IST, WAS LÄNGE, BREITE UND TIEFE HAT.“} ([Q8], S.315, 1. Definition). Doch auch die letzten der drei Bücher Euklids weisen Schwächen auf. Die Grundlegung der Stereometrie in Euklids XI. Buch macht den Eindruck, als sei das Gebiet nicht einmal annähernd in dem Maße von Vorläufern durchgearbeitet worden, wie beispielsweise die Planimetrie in Buch I. Dies zeigt sich durch Lücken in den ersten Beweisen und durch das Fehlen von Postulaten. Gewisse Postulate der Ebene legen zwar schon Eigenschaften des Raumes fest, sind jedoch unzureichend. Zunächst wollen wir uns mal einem fehlerhaften Beweis widmen. Der obenstehende Satz mit Beweis stellt auf den ersten Blick kein Problem dar. Beim näheren Hinsehen ergibt sich das Problem, dass Euklid sich im oberen Teil auf Definition 19 aus Buch I bezieht. Damit begeht er einen inhaltlichen

[7] Mathematisch versteht man unter „Metrik“ eine Abstandsfunktion d, die von der Dimension abhängig ist.

Fehler. Diese Definition bezieht sich nämlich nur auf Figuren, von denen feststeht, dass sie einer Ebene angehören. *ECB* besteht aber lediglich aus drei Strecken. Es steht nicht fest, ob überhaupt ein flächenhafter Teil der Figur einer Ebene angehört. Ergänzend hätte hier ein Postulat die Sache wieder richtig gestellt, dass festlegt, „dass man von jeder Strecke nach jedem Punkt eine Ebene legen kann". Man kann hier also auch deutliche Schwächen entdecken. Inhaltlich widmet sich Buch XI noch den Problemen der Lagebeziehungen zwischen den Gebilden Gerade und Ebene und Sätzen und Aufgaben über dreiseitige körperliche Vielecke und Parallelflache[8]. Auch sehr ausgeprägt wird hier die Lehre vom Rauminhalt behandelt. Buch XI bahnt schon seinem Nachfolger, Buch XII, den Weg. Es beschäftigt sich mit den infinitesimalen Methoden der Rauminhaltslehre. Rauminhalte, die sich elementar nicht mehr ableiten lassen, werden in Buch XII verglichen. Untersucht wird infinitesimal z.B. die Berechnung des Kugelvolumens. Man spricht an dieser Stelle auch von der Exhaustionsmethode. Diese Methode geht bis auf Archimedes zurück. Archimedes arbeitete mit Grenzwerten von Flächen. Es gelang ihm damit, bestimmte Eigenschaften von Parabelsegmenten aufzuzeigen.

Buch XIII widmet sich den fünf Platonischen Körpern. Es handelt sich dabei um reguläre Polyeder, die Würfel, Pyramide, Dodekaeder, Oktaeder und Ikosaeder genannt werden. Alle Körper sind laut Pappos, einem griechischen Mathematiker, der um 320 lebte, weder Euklids noch Platons Werk. Die ersten drei gehen wohl auf die Pythagoreer zurück und Oktaeder und Ikosaeder sind Theaitetos' Beitrag. Nach Platon wurden sie benannt, weil jener sie in seinem Dialog „Timaios" verarbeitete und sie als Grundformen der vier Elemente betrachtete. Hierbei steht:

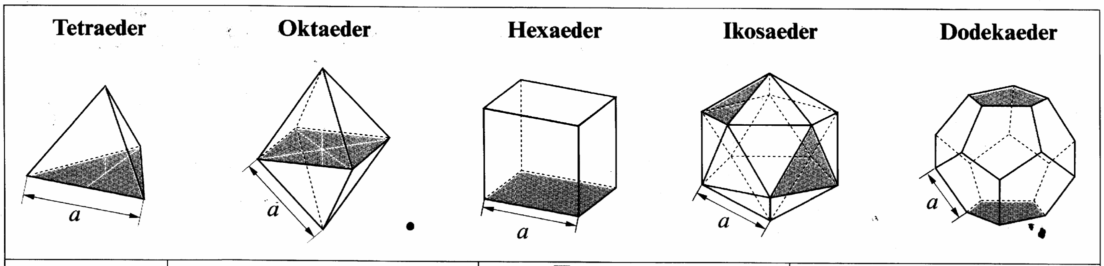
- der Würfel für die Erde;
- das Oktaeder für die Luft;
- das Tetraeder (die Pyramide) für das Feuer;
- das Ikosaeder für das Wasser.

Die Welt habe hierbei die Form eines Dodekaeders. Abbildung 11 zeigt die fünf Platonischen Körper und einige ihrer Eigenschaften. Die Erkenntnisse über ihre Eigenschaften brachte jedoch erst die moderne Mathematik hervor. Im Altertum war die Theorie der Elemente

[8] Von drei Paaren paralleler Ebenen begrenzter Raumteil

viel interessanter. Es wurde behauptet, dass Platon hiermit allermodernste Mathematik betreibe. In Wahrheit jedoch war diese Mathematik die Arbeit seiner Vorgänger.

Regelmäßige Polyeder



Tetraeder	4 gleichseitige Dreiecke	$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \approx 0{,}1179a^3$	$A_O = \sqrt{3} \cdot a^2 \approx 1{,}7321a^2$
Oktaeder	8 gleichseitige Dreiecke	$V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3 \approx 0{,}4714a^3$	$A_O = 2\sqrt{3} \cdot a^2 \approx 3{,}4641a^2$
Würfel	6 Quadrate	$V = a^3$	$A_O = 6a^2$
Ikosaeder	20 gleichseitige Dreiecke	$V \approx 2{,}1817a^3$	$A_O \approx 8{,}6603a^2$
Dodekaeder	12 regelmäßige Fünfecke	$V \approx 7{,}6631a^3$	$A_O \approx 20{,}6457a^2$

Abbildung 12: Regelmäßige Polyeder

Der Grundbestandteil dieser Körper ist ein Dreieck, dessen Hypotenuse die zweifache Länge einer Kathete hat. Entsprechend dieser Flächen sind diese Körper zusammen – gesetzt: das Oktaeder, Tetraeder und Ikosaeder aus gleichseitigen Dreiecken; der Würfel aus Quadraten und das Dodekaeder aus regelmäßigen Fünfecken. Euklid selbst übernahm für Buch XIII der ELEMENTE die Arbeit des Theaitetos leicht abgeändert, wie aus den Schriften Sachs', eines Mathematikers des 20. Jh., hervorgeht. Es war mit Sicherheit auch hier die Absicht Euklids, Platons Philosophie zu vertreten und seine Theorie der Elemente, die in den ELEMENTEN selbst keine Rolle spielt, zu übernehmen. Der letzte Beweis in Euklids ELEMENTEN ist folgender Behauptung gewidmet:

> „WEITER BEHAUPTE ICH, DAß SICH AUßER DEN BESPROCHENEN FÜNF KÖRPERN KEIN WEITERER KÖRPER ERRICHTEN LÄSST, DER VON EINANDER GLEICHEN GLEICHSEITIGEN UND GLEICHWINKLIGEN FIGUREN UMFAßT WÜRDE: …"
>
> [Q8], S.412f. §18a

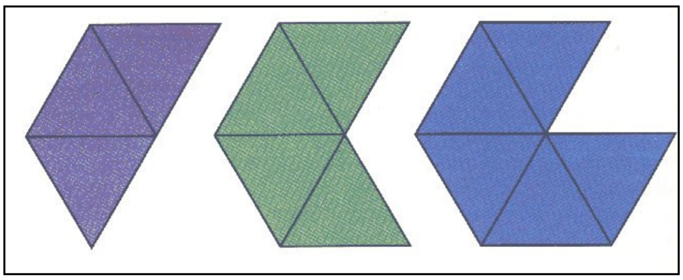


Abbildung 13: Anordnung von gleichseitigen Dreiecken um einen gemeinsamen Punkt

Euklids darauf folgender Beweis ist logisch und lässt auch kaum Kritik zu. Weiterhin bestätigt er, dass es nur diese fünf Platonischen Körper geben kann. Er stellt einen sehr gelungen Abschluss der ELEMENTE dar. Die Grundidee hierfür liegt in der Untersuchung der Anordnung von gleichseitigen Dreiecken um einen Punkt in der Ebene. Hierbei entsteht Raum für eine dreidimensionale Faltung dieses Gebildes. Dabei müssen es mindestens drei Dreiecke sein. Der daraus resultierende Gedanke ist, dass es höchstens fünf sein können, denn sechs Dreiecke bilden um diesen ebenen Punkt einen Winkel von 360° und somit wäre keine Faltung mehr möglich. Euklids Gedankengang ist ähnlich.

In Buch XIII wurden jedoch nicht alle Eigenschaften der regelmäßigen Körper betrachtet. So kam es dann, wie in Kapitel 1.2 schon erwähnt, zur Erweiterung der ELEMENTE um zwei weitere Bücher, die u.a. diese Probleme verarbeiten.

6 Anhang

6.1 Epilog: Meisterwerk oder Dreigroschenroman – Abschließende Gedanken

Abschließend wäre zu sagen, dass dieses eines der größten Mathematikbücher überhaupt war. Fragt man jedoch heute die Leute nach diesem Buch, dann kommen oftmals Antworten wie: „So was gab es?“. Ich bin mir sicher, dass die ELEMENTE im Laufe der Zeit an Bedeutung verloren haben. Die meisten kennen den Begriff „euklidische Geometrie“ überhaupt nicht und leider spielt er im Mathematikunterricht auch eine untergeordnete Rolle. Dieses Werk war ja nicht nur Euklids Verdienst, aber ihm einen gewissen Respekt zu sichern, halte ich für angebracht. Die Systematisierung der Geometrie und das Aufstellen eines dafür geeigneten Axiomensystems sind beachtlich. Diese mehr oder weniger kleinen Fehler im Axiomensystem und in den Beweisen wurden oben ausreichend diskutiert. Anlass das ganze Axiomensystem zu überarbeiten, gab das „Parallelenpostulat“. Letztlich entstand aus der Diskussion um jenes fünfte Postulat ein komplett neues Axiomensystem. Es ist ja nicht so, dass sich Euklid damit nichts gedacht hat. Für ihn war dieses Postulat wichtig. Vermutlich sah er auch selber, dass es komplexer, als die anderen Postulate ist. Es war aber für seine Geometrie unentbehrlich.

Wahrscheinlich wären aber ohne diese „kleinen Fehler“ die ELEMENTE niemals so ein berühmtes Werk geworden. Ein perfektes Axiomensystem hätte nicht so großes Aufsehen erregt. Eine perfekte Axiomatisierung ist aber ohnehin nicht möglich, da es durch induktives Schließen theoretisch immer möglich ist, bewährte Theorien zu widerlegen.

Außerdem hätten sich die Mathematiker dann dieses Problems nicht angenommen und Namen, die uns heute ein Begriff sind, wären vermutlich nie aufgetaucht. Mit Hilbert erfuhr der von Euklid gebahnte Weg seine Vollendung. Durch die Zurückführung von Beweisen der Widerspruchsfreiheit von Geometrien auf die Arithmetik verschob sich das Problem der Grundlegung der Geometrie auf die Grundlegung der Arithmetik. Somit tauchten durch die ELEMENTE Euklids nicht nur geometrische Veränderungen auf. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit war es zu zeigen, dass sich Euklid von der Platonischen Schule beeinflussen ließ und Platons Lehre übernahm, sie jedoch mathematisch deutete. Gezeigt werden konnte dies an den Platonischen Körpern, die erwiesenermaßen einen philosophischen Zweck hatten, Euklid sie aber als mathematische Körper übernahm, und an Euklids anderen Werken. Der Inhalt der ELEMENTE spielte natürlich eine Rolle. Dieser kam sicher an manchen Stellen zu kurz, aber wie einleitend schon gesagt wurde, geht es weniger um den Inhalt, als um das Ziel dieser Arbeit, nämlich die Beeinflussung der Geometrie durch die ELEMENTE. Eine große Beeinflussung war hierbei die Entwicklung verschiedener nichteuklidischer Geometrien. Weiterhin wurde durch Euklid für sehr lange Zeit die Geometrie geprägt und somit wäre es fatal zu sagen, dass Euklids ELEMENTE auf Grund diverser Fehler keine Bedeutung für die Mathematik haben bzw. hatten. Man sollte die Fehler an dieser Stelle zwar nicht verharmlosen, aber wie sagt man so schön; der Versuch zählt!

Ich komme nun zu der Überzeugung, dass die ELEMENTE ein mathematisches Meisterwerk waren und es heute immer noch sind.

6.2 Personenverzeichnis und Kurzbiographien

Nachfolgend findet sich eine Liste der wichtigsten Mathematiker, die im Text auftauchen. Entnommen ist sie den Werken [Q6] und [Q10].

ᶜUmar al – Ḫayyām (1048 – 1131)

Geboren und gestorben in Nischapur. Wirkte in Baghdad und Isfahan. Proportionentheorie, „Parallelenpostulat“, Gleichungen. Berühmter Dichter.

Archimedes (287 – 212 v. Chr.)

Der größte Mathematiker der Antike mit wichtigen Beiträgen zur Geometrie und Statik. Er berechnete die Fläche von Parabelabschnitten und war damit auch Pionier der Analysis. Als Ratgeber von König Hieron von Syrakus wurde er bei der Eroberung der Stadt durch die Römer unter Marcellus ermordet.

Johann von Bolyai (1802 – 1860)
Ungarischer Mathematiker, der unabhängig von Lobatschewskij ein Modell für eine nichteuklidische Geometrie formulierte.

Eudoxos (um 408 v. Chr. – um 355 v. Chr.)
Geboren und Gestorben in Knidos. Urheber der Bücher V und VII der ELEMENTE des Euklid. Geniale Theorie des Irrationalen.

Karl Friedrich Gauß (1777 – 1855)
Deutscher Mathematiker, einer der größten Mathematiker überhaupt, Verfasser der „Princeps mathematicorum“. Lieferte wichtige Beiträge zur reinen angewandten Mathematik. Sein Buch „Disquistiones Arithmeticae“ bildete die Grundlage für die moderne Zahlentheorie.

David Hilbert (1862 – 1943)
Deutscher Mathematiker, Professor in Göttingen. Einer der letzten, der für alle Bereiche der Mathematik wichtige Beiträge lieferte.

Felix Klein (1849 – 1925)
Deutscher Geometer und Algebraiker. In seiner Antrittsvorlesung in Erlangen formulierte er seine Vorstellungen über die Geometrie. Dieses Erlanger Programm hat die Geometrie und den Geometrieunterricht maßgeblich beeinflusst. Sein Interesse galt vor allem der Didaktik der Mathematik.

Andrej Kolmogorov (1903 – 1987)
Russischer Mathematiker, formulierte 1933 eine strenge mathematische Fassung der Wahrscheinlichkeitstheorie und lieferte Beiträge zu vielen Teilen der Mathematik, kümmerte sich intensiv um den mathematischen Unterricht.

Nikolaij Lobatschewskij (1793 – 1856)
Russischer Mathematiker, arbeitete und lehrte in Kasan. Entwickelte unabhängig von Gauß und Bolyai Modelle der nichteuklidischen Geometrie. Obwohl blind, diktierte er Jahre vor seinem Tod seine „Pangeometrie“, eine Zusammenfassung seines Lebenswerks.

August – Ferdinand Möbius (1790 – 1868)
Geboren in Schulpforta und gestorben in Leipzig. Professor in Leipzig. Grundlegende Arbeiten zur analytischen Geometrie.

Proklos Diadochos (410 – 485)
Geboren in Byzanz und gestorben in Athen. Leiter der Akademie in Athen. Verfasser des „Geometerkatalogs“.

Pythagoras (um 580 – 500 v. Chr.)
Griechischer Philosoph und Mathematiker. Gründete in Kroton eine religiös – politische Gemeinschaft, in der er auch Mathematik, Astronomie, Musik und Philosophie unterrichtete. Seinen Namen trägt für alle Zeiten der Satz von den Quadraten über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks.

Bernhard Riemann (1826 – 1866)
Deutscher Mathematiker, wichtige Beiträge zur Funktionentheorie. In seinem Habilitationsvortrag

„Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" lieferte er das Fundament für Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie.

Girolamo Saccheri (1667 – 1773)
Jesuit. Professor in Mailand, Turin und Pavia. Nichteuklidische Geometrie.

6.3 Umformulierungen von übernommenen Beweisen und Sätzen

Beweis: „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen" (S.5)

Euklids genialer Widerspruchsbeweis beruht darauf, zu zeigen, dass es mehr Primzahlen gibt, als eine vorgegebene Menge an Primzahlen. Sie besteht aus den Primzahlen P_1, P_2, $P_3 \ldots P_N$. Das Geniale an der Sache ist nun, dass Euklid eine neue Zahl $Q_A=(P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_N)+1$ erfand, die aus dem Produkt aller Primzahlen vermehrt um eins besteht. In Euklids Beweis hieß diese Zahl EF und die eins ist ein beliebiger Rest, den er DF nannte. Die Teilbarkeit von Q_A durch eine der Zahlen P_1, P_2, $P_3 \ldots P_N$ ist nicht mehr gegeben, da immer der Rest eins bleiben würde. Q_A muss nun entweder eine Primzahl sein, damit wäre eine neue Primzahl gefunden oder sie ist keine, muss sich dann aber aus Primzahlen zusammensetzen lassen oder, anders gesagt, durch andere Primzahlen teilbar sein, die nicht der Liste P_1, P_2, $P_3 \ldots P_N$ entstammen. Euklid bezeichnete eine solche Zahl mit g. Wir können sie als P_{N+1} bezeichnen, da sie unserer Liste nicht entstammt. Die Nomenklatur ist allerdings egal, denn entweder ist Q_A die neue Primzahl oder aber P_{N+1}, die ein Teiler von Q_A ist. So könnten wir die Liste der Primzahlen unendlich fortführen.

Postulat: „Gefordert soll sein: 1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,[…]." (S.9)

Zwei Punkte in der Ebene können durch eine Strecke verbunden werden.

Axiom: „Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich." (S.9)

Gegeben sind drei Dinge A, B und C. Für diese gilt B=C, wenn A=B und A=C. Da also B und C gleich A sind, lassen sich ebenfalls B und C gleichsetzen.

„Parallelenpostulat" (S.9)

Zu jeder Geraden verläuft durch jeden Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, genau eine Parallele.

Definition: „Ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat." (S.19)

Ein Körper ist ein dreidimensionales Gebilde mit Länge, Breite und Tiefe.

6.4 Sachregister